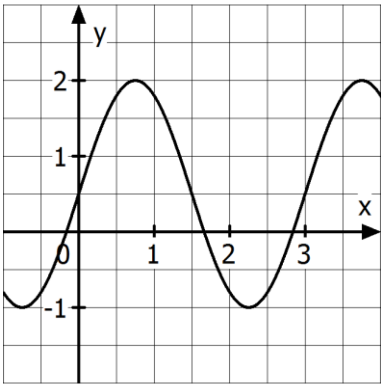
Punkte

1 Die Abbildung zeigt das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x) + c$.
Bestimmen Sie aus der Abbildung die Werte für a, b und c. 3



2 K ist das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = -x^3 + x$; $x \in \mathbb{R}$.
Die Normale von K im Wendepunkt schließt mit K zwei Teilflächen ein.

Bestimmen Sie den Flächeninhalt einer dieser beiden Teilflächen. 6

3 Eine Funktion f hat folgende Eigenschaften:

(1) $f(3) = 1$
(2) $f'(0) = 0$
(3) $f'(x) < 0$ für $0 < x < 3$
(4) $f''(x) > 0$ für $x > 3$

Welche Eigenschaften des Schaubilds von f entsprechen den Eigenschaften (1) – (4)?

Skizzieren Sie ein mögliches Schaubild von f. 6

4 Für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist die Funktion f_t gegeben durch $f_t(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 2t \cdot x^2$; $x \in \mathbb{R}$.
Das Schaubild von f_t heißt K_t.

Bestimmen Sie t so, dass der Punkt P(2|4) auf K_t liegt, und prüfen Sie, ob für dieses t der Punkt P ein Hochpunkt ist. 5

Punkte

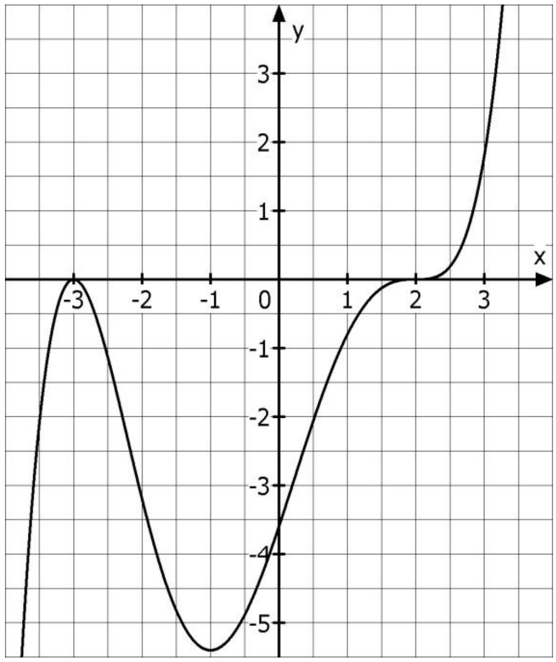
5 Die Abbildung zeigt das Schaubild der Funktion f.

Beurteilen Sie die folgenden Aussagen.

(1) $\int_0^3 f(x)dx < 0$

(2) Wenn F eine Stammfunktion von f ist, dann ist F im Bereich $[-1;1]$ monoton steigend.

(3) Die Ableitungsfunktion von f hat genau zwei Nullstellen.



6

6 K ist das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = e^{x-2} - 3$; $x \in \mathbb{R}$.
Es gibt eine Tangente an K, die mit den Koordinatenachsen ein gleichschenkliges Dreieck einschließt.

Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses gleichschenkligen Dreiecks. 4

30

Lösungsvorschlag

Punkte

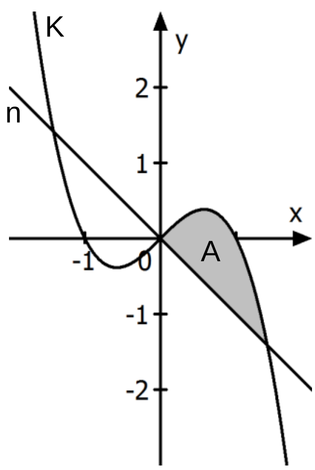
1 Amplitude: $a = \frac{2-(-1)}{2} = \frac{3}{2}$

Periode: $p = 3$, daraus ergibt sich der Faktor $b = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$

Verschiebung in y-Richtung: $c = \frac{2+(-1)}{2} = \frac{1}{2}$ 3

2 $f(x) = -x^3 + x$ und $f'(x) = -3x^2 + 1$

Skizze zur Veranschaulichung:



Da f eine Polynomfunktion 3. Grades ist und K symmetrisch zum Ursprung ist, ist der Ursprung der Wendepunkt.

Steigung der Normalen: $m_n = -\frac{1}{f'(0)} = -\frac{1}{1} = -1$,

also ist die Normale n: $y = -x$ 2

Schnittstellen von K und n:

$f(x) = -x \;\Leftrightarrow\; -x^3 + x = -x \;\Leftrightarrow\; -x^3 + 2x = 0 \;\Leftrightarrow$

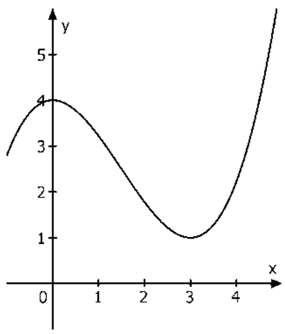
$-x(x^2 - 2) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0 \;\vee\; x = -\sqrt{2} \;\vee\; x = \sqrt{2}$ 2

Inhalt der rechten Teilfläche:

$A = \int_0^{\sqrt{2}} \left(f(x) - (-x)\right)dx = \int_0^{\sqrt{2}} \left(-x^3 + 2x\right)dx = \left[-\frac{1}{4}x^4 + x^2\right]_0^{\sqrt{2}} = -\frac{1}{4}\cdot 4 + 2 = 1$ 2

3 Eigenschaften des Schaubilds von f:

Skizze: 2



(1) Das Schaubild geht durch P(3|1).

(2) Das Schaubild hat im Schnittpunkt mit der y-Achse eine waagerechte Tangente.

(3) Das Schaubild fällt für $0 < x < 3$.

(4) Das Schaubild ist linksgekrümmt für $x > 3$. 4

Lösungsvorschlag

Punkte

4 $f_t(2)=4 \quad \Leftrightarrow \quad 4=\frac{1}{4}\cdot 2^4-2\cdot 2^3+2\cdot t\cdot 2^2 \quad \Leftrightarrow \quad 4=-12+8\cdot t \quad \Leftrightarrow \quad t=2$

P liegt auf K_2. 2

Ist P Hochpunkt von K_2?

$f_2'(x)=x^3-6x^2+8x;\quad f_2''(x)=3x^2-12x+8$

$f_2'(2)=2^3-6\cdot 2^2+8\cdot 2=0$

$f_2''(2)=3\cdot 2^2-12\cdot 2+8=-4<0$

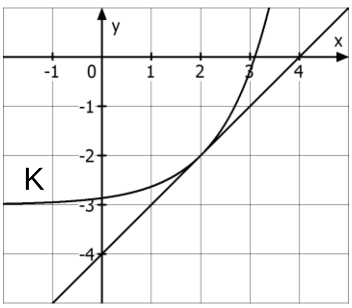
Damit ist gezeigt, dass P ein Hochpunkt von K_2 ist. 3

5 (1) Wahr, da im Intervall $[0;3]$ der Anteil der Fläche zwischen dem Schaubild und der x-Achse, der unterhalb der x-Achse liegt, größer ist, als der, der oberhalb der x-Achse liegt. 2

(2) Falsch, da f die Ableitung von F ist und im Intervall $[-1;1]$ gilt: $f(x)<0$. Also fällt das Schaubild von F. 2

(3) Falsch, da es drei Stellen gibt, an denen das Schaubild eine waagerechte Tangente hat: $x=-3$ (Hochpunkt), $x=1$ (Tiefpunkt), $x=2$ (Sattelpunkt). 2

6



$f(x)=e^{x-2}-3;\quad f'(x)=e^{x-2}$

$f'(x)>0$ für alle $x\in\mathbb{R}$, daher kann sich nur ein gleichschenkliges Dreieck ergeben, wenn die Tangente die Steigung 1 hat.

$f'(x)=1 \quad \Leftrightarrow \quad e^{x-2}=1 \quad \Leftrightarrow \quad x-2=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=2$

$f(2)=-2$

Tangente an der Stelle $x=2$: $\quad y=1\cdot(x-2)+f(2) \quad \Leftrightarrow \quad y=x-4$

Flächeninhalt des Dreiecks: $A_\Delta=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4=8$ 4